MECÁNICA DE SÓLIDOS

Curso 2017/18

J. A. Rodríguez Martínez

J. Zahr Viñuela

Tema 4

Viscoelasticidad

Tema 4

Viscoelasticidad

4.1 Introducción

Material elástico:

- **Almacena** energía mecánica sin disiparla.
- Si se aplica una **carga** en forma **instantánea**, el sólido se **deforma instantáneamente**.
- En este caso, el estado tenso-deformacional permanece constante hasta que desaparezca la carga.
- El estado tensional es de tipo "restaurador": si la carga cesa, la forma se recupera.
- La tensión $\boldsymbol{\sigma}$ depende de la deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Fluido viscoso:

- Sometidos a un estado tensional no hidrostático, **disipan energía**, sin posibilidad alguna de almacenamiento.
- Ante un estado tensional tangencial, el fluido fluye de manera estacionaria.
- El estado tensional no es de tipo "restaurador": si cesa las tensiones, las partículas fluidas no regresan a su posición inicial.
- La tensión $\boldsymbol{\sigma}$ depende de la velocidad de deformación $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

Material viscoelástico:

- Puede considerarse que tiene un comportamiento "intermedio" entre sólido elástico y fluido viscoso.
- Si se aplica una carga en forma **instantánea**, sufre una **deformación instantánea**, seguida de otra **deformación diferida**, creciente con el tiempo y que puede, o no, ser limitada.

Así como causa de la **deformación elástica** está asociada al desplazamiento de átomos de sus posiciones de equilibrio, la deformación en el **caso visco-elástico** está asociada a efectos de **difusión** de átomos o moléculas en el seno del material

4.1 Introducción

Material elástico:

- La tensión $\boldsymbol{\sigma}$ depende de la deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\sigma = f(\varepsilon)$$

- Un ejemplo es la Ley de Hooke-Lamé:

$$\sigma = f(\varepsilon) = E\varepsilon$$

Material viscoelástico:

- La tensión $\boldsymbol{\sigma}$ depende de la deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$ y de la velocidad de deformación $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$:

$$\sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$$

- Los estados tensional y deformacional **NO** están **biunívocamente relacionados**, ya que influye la historia de los estados de tensiones y deformaciones por los que el material ha pasado anteriormente.

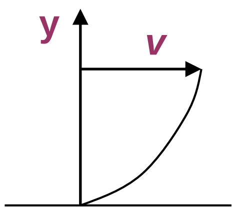
Fluido viscoso:

- Ante un estado tensional tangencial, el fluido fluye de manera estacionaria y la tensión $\boldsymbol{\sigma}$ depende de la velocidad de deformación $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$:

$$\sigma = f(\dot{\varepsilon})$$

- Un ejemplo son los fluidos Newtonianos:

$$\tau = \eta \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial y} = \eta\dot{\gamma}$$



$$\boxed{\tau = \eta \frac{d\mathrm{v}}{dy}}$$

Viscosidad del material fluido:
Es una medida del rozamiento interno entre capas de fluido en el plano de aplicación de la tensión tangencial

4.1 Introducción

Ejemplos de materiales con comportamiento viscoelástico:

- Metales a alta temperatura o bajo solicitación mecánica de “larga duración”.
- Hormigón.
- Ciertos polímeros en estado vítreo.
- Los suelos sometidos a acciones dinámicas, etc

Tema 4

Viscoelasticidad

4.2 Aspectos fenomenológicos

Fenomenológicamente, se puede reconocer que un material obedece a **ELASTICIDAD CLÁSICA** si se puede constatar experimentalmente que, simultáneamente:

- La deformación es completamente recuperable bajo descarga
- La tensión $\boldsymbol{\sigma}$ depende únicamente de la deformación $\boldsymbol{\varepsilon}$: $\sigma = f(\varepsilon)$

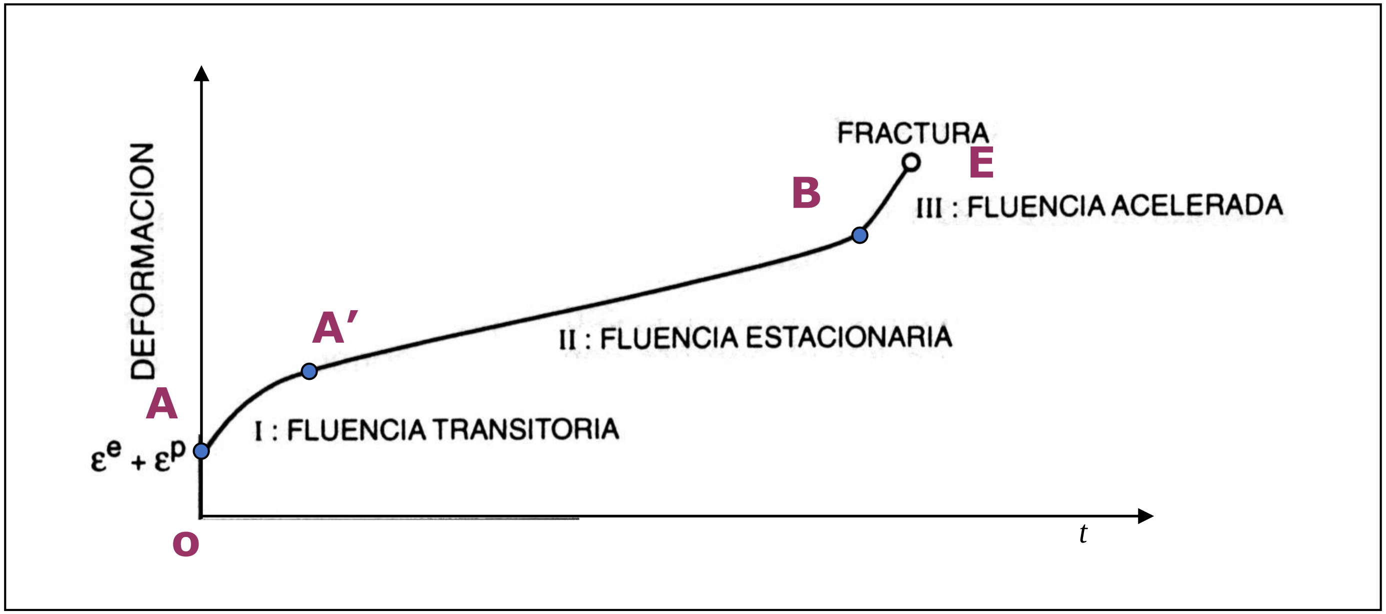
Por su parte, se puede reconocer que un material es de tipo **VISCO-ELÁSTICO** (o visco-plástico) si se verifican experimentalmente los siguientes fenómenos:

- El fenómeno de **FLUENCIA**
- El fenómeno de **RELAJACIÓN**

4.2 Aspectos fenomenológicos

¿ Qué es FLUENCIA ? - Evidencia experimental del comportamiento viscoelástico

Si se somete a un sólido a una **tensión instantánea**, que luego se **mantiene constante**, la deformación aumenta con el tiempo en 3 fases diferenciadas:

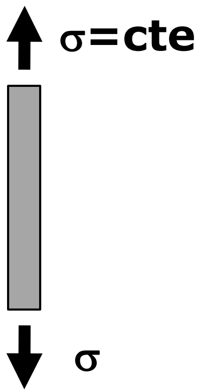


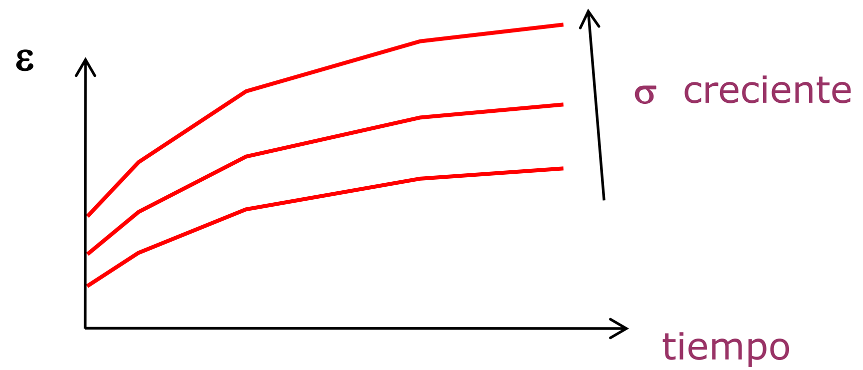
Parte de la deformación lograda en la primera etapa (fluencia primaria o transitoria) puede recuperarse: **<u>deformación viscoelástica</u>**

4.2 Aspectos fenomenológicos

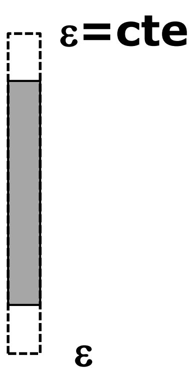
Ensayos experimentales de FLUENCIA y de RELAJACIÓN

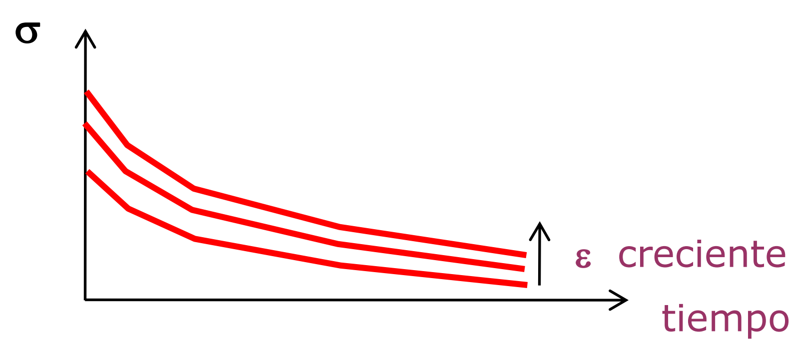
-**Ensayo de fluencia (uniaxial):** ensayo a **tensión** constante en el que se mide la variación de la **deformación** en el tiempo





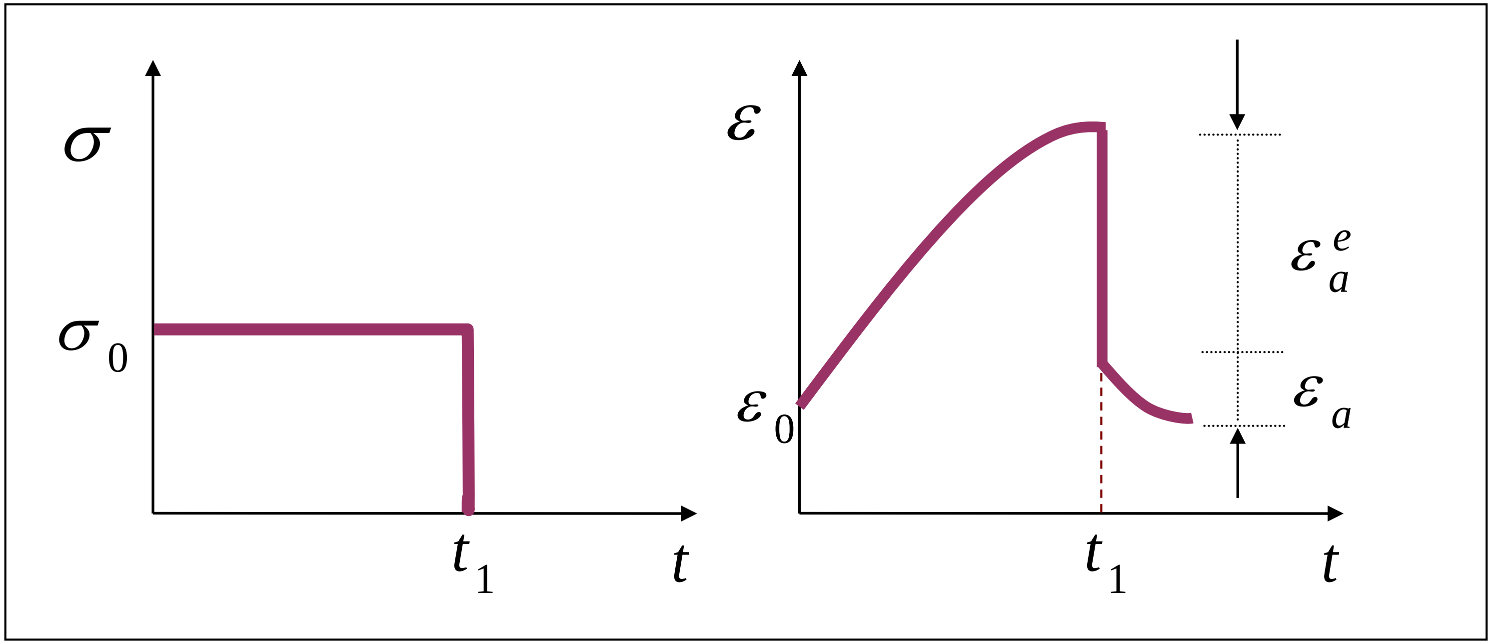
-**Ensayo de relajación (uniaxial):** ensayo a **deformación** constante en el que se mide la variación de la **tensión** en el tiempo





4.2 Aspectos fenomenológicos

Ensayo de FLUENCIA

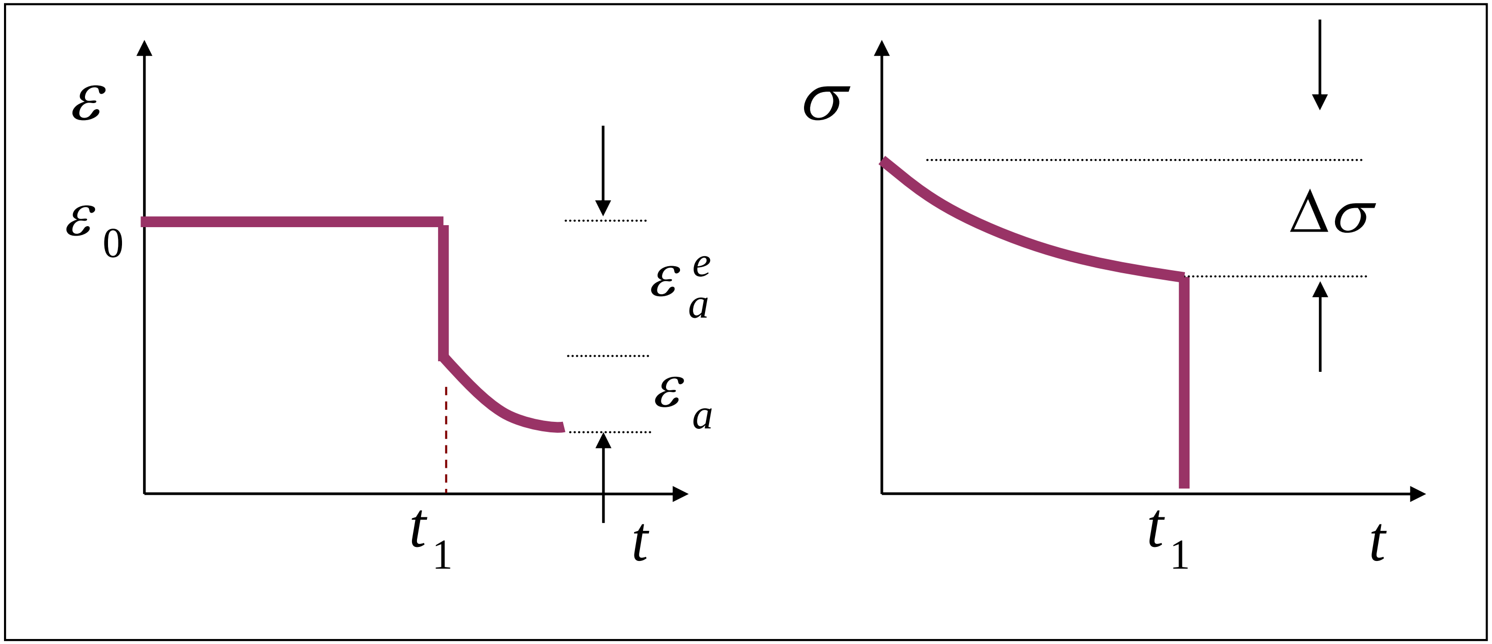


- Si se aplica instantáneamente una **tensión $\boldsymbol{\sigma_0}$**, que luego se mantiene **constante** en el tiempo, se observa un **incremento paulatino** de la **deformación** a partir del valor instantáneo **inicial $\boldsymbol{\varepsilon_0}$**.

- Si en un instante $\boldsymbol{t_1}$, se descarga la probeta (esto es, desaparece la tensión), se observa una **caída** de la **deformación** (caída **instantánea al principio** y **paulatina después**) hasta un valor permanente, valor que puede, en parte, recuperarse.

4.2 Aspectos fenomenológicos

Ensayo de RELAJACIÓN



- Si se mantiene la **deformación constante** en el tiempo, se observa una **disminución paulatina** de la **tensión** a partir de un **valor inicial** al que se había llegado **instantáneamente**.

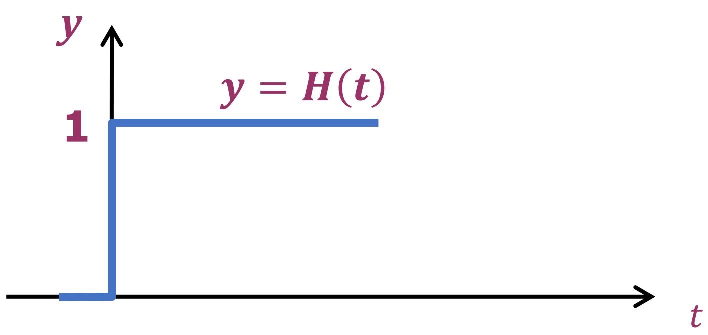
- Si en un instante t_1, se descarga la probeta, se observa una **caída brusca y completa** de la **tensión**, a la vez que una **caída** de la **deformación** (caída **brusca al principio** y **paulatina después**) hasta un valor permanente, valor que puede, en parte, recuperarse.

Tema 4

Viscoelasticidad

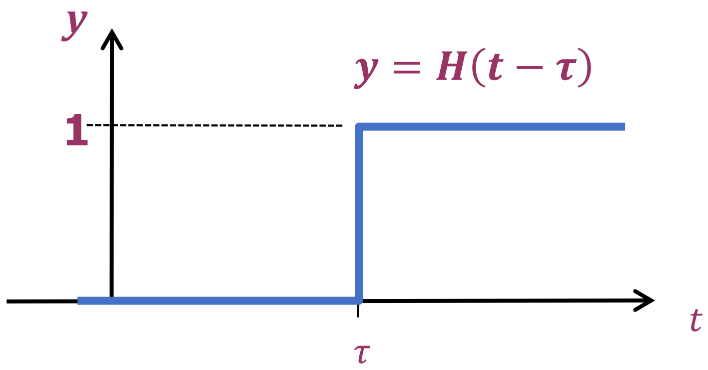
4.3 Herramientas matemáticas

Función "escalón unitario" (función Heaviside):



$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

H no está definida en $t = 0$

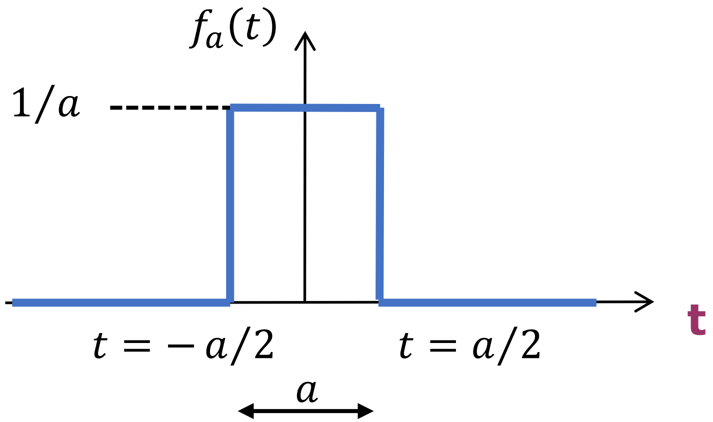


$$H(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \tau \\ 1 & \text{si } t > \tau \end{cases}$$

H no está definida en $t = \tau$

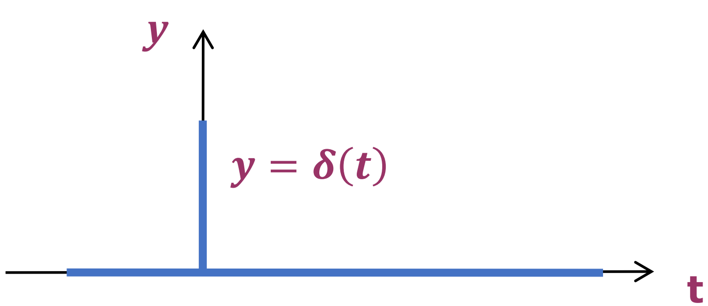
4.3 Herramientas matemáticas

Función “delta de Dirac”, δ:



Sea $\boldsymbol{a \geq 0}$:

$$f_a(t) = \begin{cases} 1/a & \text{si } |t| < a/2 \\ 0 & \text{si } |t| > a/2 \end{cases}$$



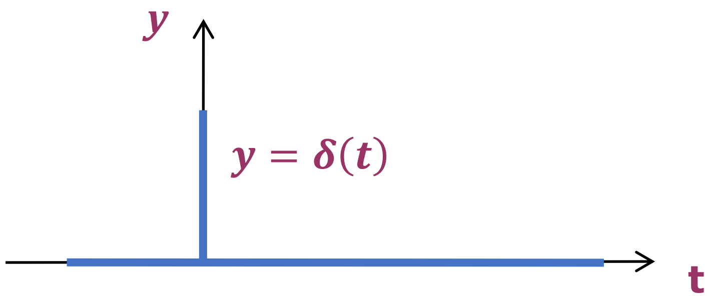
La función “delta de Dirac” se define a partir de f como:

$$\delta(t) = \lim_{a \to 0} f_a(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

δ no está definida en $t = 0$

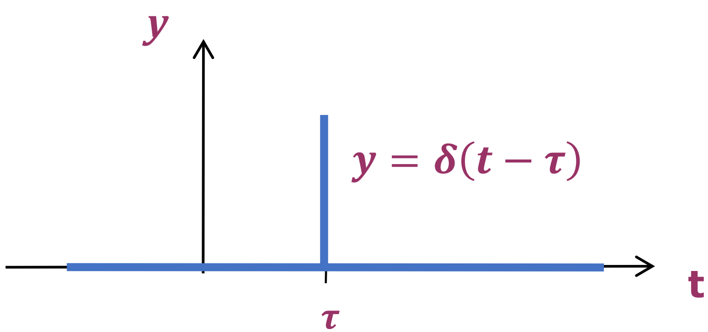
4.3 Herramientas matemáticas

Función “delta de Dirac”, δ:



$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

$\boldsymbol{\delta}$ no está definida en $t = 0$



$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = \tau \\ 0 & \text{si } t \neq \tau \end{cases}$$

$\boldsymbol{\delta}$ no está definida en $t = \tau$

Propiedad de la “delta de Dirac”:

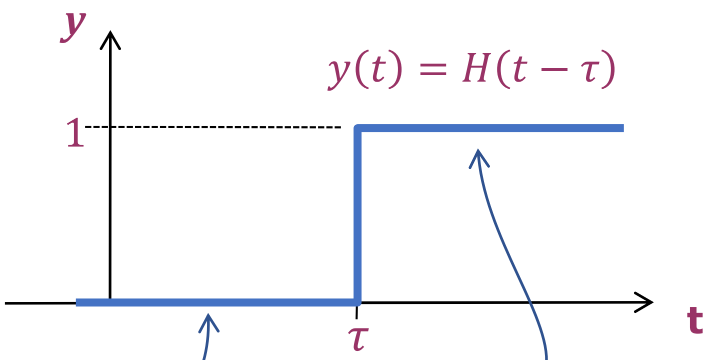
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau)dt = 1 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

4.3 Herramientas matemáticas

Relación entre las funciones Heaviside y Dirac:

Si se considera la función Heaviside desplazada:

$$H(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \tau \\ 1 & \text{si } t > \tau \end{cases}$$



$$\frac{dH}{dt} = 0$$

Es directo verificar que:

- Su derivada es nula para $t < \tau$
- Su derivada es nula para $t > \tau$
- En $t = \tau$, puede considerarse que la línea vertical tiene pendiente "*infinita*".

La derivada de ***H*** es la "*delta de Dirac*":

$$\frac{dH(t-\tau)}{dt} = \delta(t-\tau) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = \tau \\ 0 & \text{si } t \neq \tau \end{cases}$$

4.3 Herramientas matemáticas

Transformada de Laplace de una función del tiempo:

- Sea $\boldsymbol{f(t)}$ una función del tiempo, definida para $\boldsymbol{t > 0}$
- La "***transformada de Laplace***" de la función $\boldsymbol{f(t)}$ se denota como $\boldsymbol{\mathcal{L}[f(t)]}$, y se define mediante la expresión integral siguiente:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \overline{f}(s)$$

- Puede entenderse a $\boldsymbol{\mathcal{L}}[\quad]$ como un ***"operador"*** que, cuando se aplica sobre una función del tiempo, resulta en una nueva función en variable $\boldsymbol{s}$.

- $\boldsymbol{\mathcal{L}}[\quad]$ es un ***"operador lineal"*** :

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha\mathcal{L}[f(t)] + \beta\mathcal{L}[g(t)] = \alpha\,\overline{f}(s) + \beta\,\overline{g}(s)$$

4.3 Herramientas matemáticas

Algunas Transformadas de Laplace útiles en Viscoelasticidad (1/3)

	Función del tiempo $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\,\bar{f}(s)\,]$	Transformada de f $\bar{f}(s) = \mathcal{L}[\,f(t)\,]$
Escalón unitario	$f(t) = H(t)$	$\bar{f}(s) = \frac{1}{s}$
Escalón unitario desplazado	$f(t) = H(t-\tau)$	$\bar{f}(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s}$
Dirac	$f(t) = \delta(t)$	$\bar{f}(s) = 1$
Dirac desplazada	$f(t) = \delta(t-\tau)$	$\bar{f}(s) = e^{-\tau s}$
Función identidad (polinomio lineal)	$f(t) = t$	$\bar{f}(s) = \frac{1}{s^2}$
Función potencial	$f(t) = t^n$	$\bar{f}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$
Polinomio de grado n	$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$	$\bar{f}(s) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k k!}{s^{k+1}}$

4.3 Herramientas matemáticas

Algunas Transformadas de Laplace útiles en Viscoelasticidad (2/3)

	Función del tiempo $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\,\bar{f}(s)\,]$	**Transformada de f** $\bar{f}(s) = \mathcal{L}[\,f(t)\,]$
Seno	$f(t) = \sin(\omega t)$	$\bar{f}(s) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
Coseno	$f(t) = \cos(\omega t)$	$\bar{f}(s) = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
Evolución exponencial (es decaimiento para $\alpha > 0$)	$f(t) = e^{-\alpha t}$	$\bar{f}(s) = \dfrac{1}{(\alpha+s)}$
Evolución exponencial (es crecimiento para $\alpha > 0$)	$f(t) = \dfrac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}$	$\bar{f}(s) = \dfrac{1}{s(\alpha+s)}$
Función con envolvente	$f(t) = g(t)e^{at}$	$\bar{f}(s) = \bar{g}(s-a)$
Función con *"escala de tiempo"*	$f(t) = g(at)$	$\bar{f}(s) = \dfrac{1}{a}\,\bar{g}\left(\dfrac{s}{a}\right)$
Función desplazada en el tiempo	$f(t) = g(t-a)$	$\bar{f}(s) = e^{-as}\,\bar{g}(s)$

4.3 Herramientas matemáticas

Algunas Transformadas de Laplace útiles en Viscoelasticidad (3/3)

- Transformada de Laplace de la derivada temporal de una función:

$$f(t) = \frac{d^n g(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \overline{f}(s) = s^n \overline{g}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \left. \frac{d^k g}{dt^k} \right|_{t=0}$$

- Si además se da el caso particular de que $\boldsymbol{g}$ y **todas sus derivadas** son nulas en el instante inicial $\boldsymbol{t = 0}$, es decir:

$$g(0) = 0 \quad \text{y además} \quad \left. \frac{dg}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d^2 g}{dt^2} \right|_{t=0} = \cdots = \left. \frac{d^n g}{dt^n} \right|_{t=0} = 0$$

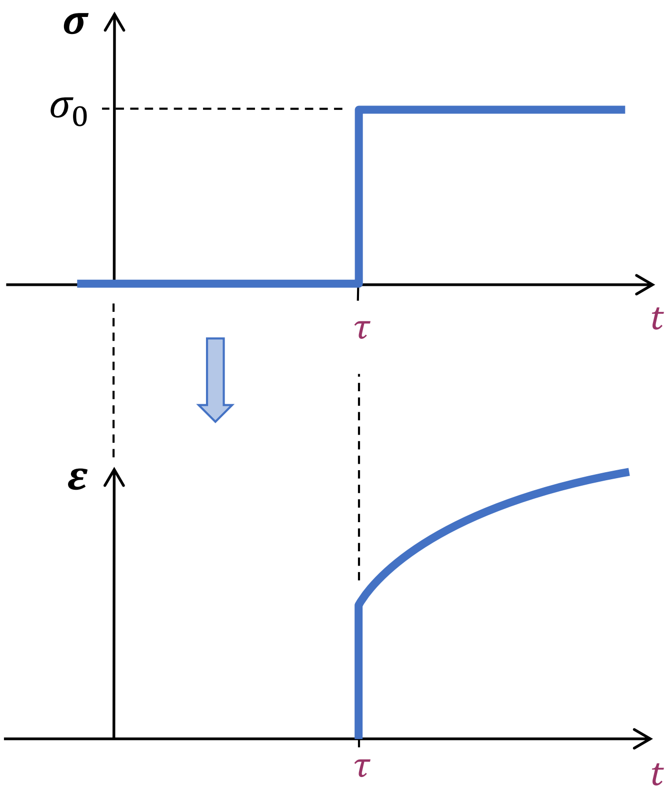
Entonces: $$f(t) = \frac{d^n g(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \overline{f}(s) = s^n \overline{g}(s)$$

Tema 4

Viscoelasticidad

4.4 Función de Fluencia y Módulo de Relajación

Función de fluencia.-



Se prescribe una *tensión constante* σ_0 a partir del instante τ:

$$\boxed{\sigma = \sigma_0 H(t-\tau)}$$

Se observa una *deformación variable*, descrita mediante la siguiente función:

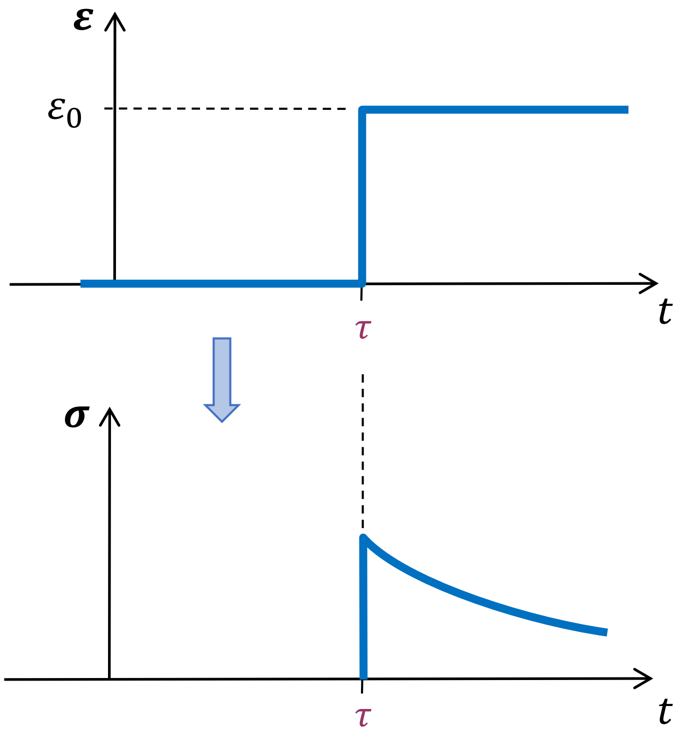
$$\boxed{\varepsilon = \sigma_0\, J(t-\tau)}$$

$J(t-\tau)$ se conoce como **Función de Fluencia**

La función $J(t-\tau)$ mide la respuesta en deformación cuando la tensión constante prescrita es unitaria ($\sigma_0 = 1$)

4.4 Función de Fluencia y Módulo de Relajación

Módulo de relajación.-



Se prescribe una *deformación constante* ε_0 a partir del instante τ :

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0\, H(t-\tau)}$$

Se observa una *tensión variable*, descrita mediante la siguiente función:

$$\boxed{\sigma = \varepsilon_0\, Y(t-\tau)}$$

$Y(t-\tau)$ se conoce como **Módulo de Relajación**

La función $Y(t-\tau)$ mide la respuesta en tensión cuando la deformación constante prescrita es unitaria ($\varepsilon_0 = 1$)

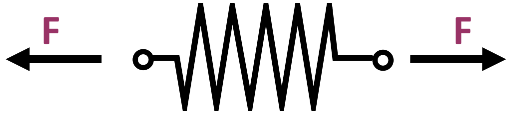
Tema 4

Viscoelasticidad

4.5 Modelos Viscoelásticos de Maxwell y de Kelvin

Modelos viscoelásticos analógicos.-

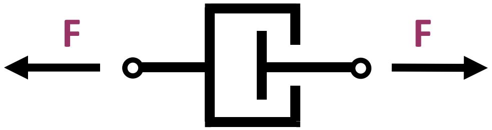
- ***Elemento "muelle"*** :



$$\longrightarrow F = ku \longrightarrow \sigma = E\varepsilon$$

- ***Elemento "amortiguador"*** :

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy} \longrightarrow \tau = \eta\dot{\gamma}$$



$$\longrightarrow F = c\dot{u} \longrightarrow \sigma = c\dot{\varepsilon}$$

Un **modelo viscoelástico analógico** es una combinación de **muelles** y **amortiguadores** que se utiliza para reflejar un comportamiento viscoelástico según leyes constitutivas del tipo:

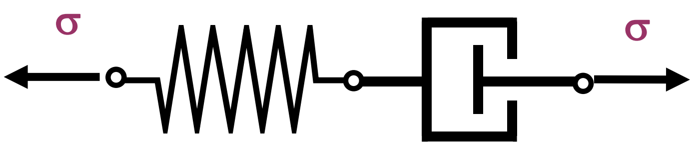
$$\sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$$

La aplicabilidad de un modelo viscoelástico debe sancionarse mediante ensayos.

4.5 Modelos Viscoelásticos de Maxwell y de Kelvin

Modelo de Maxwell.-

(*a*) ***Planteamiento del modelo*** :



Muelle: $\sigma = E\varepsilon_m$ **[1]**

Amortiguador: $\sigma = c\dot{\varepsilon}_a$ **[2]**

Elemento completo: $\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_a$ **[3]**

Derivando **[3]** con respecto al tiempo, se tiene: $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_m + \dot{\varepsilon}_a$ **[4]**

Derivando **[1]** con respecto al tiempo, se tiene: $\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}_m$ **[5]**

Introduciendo **[5]** y **[2]** en **[4]**, se obtiene:

$$\boxed{\sigma + \frac{c}{E}\dot{\sigma} = c\dot{\varepsilon}}$$

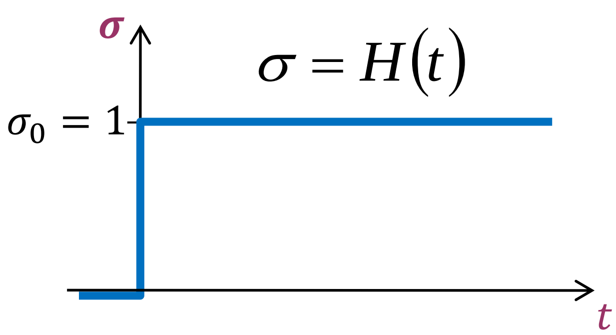
Ecuación diferencial del modelo de Maxwell

(Define implícitamente una relación entre la tensión y la deformación)

4.5 Modelos Viscoelásticos de Maxwell y de Kelvin

Modelo de Maxwell (Cont.).-

(*b*) *Función de Fluencia* $(\sigma_0 = 1)$:



Ecuación diferencial **del modelo:**

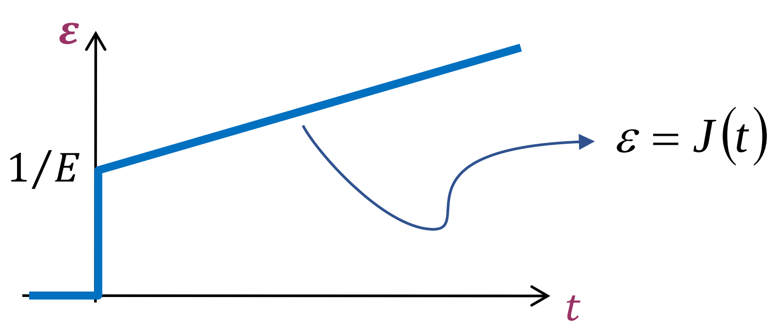
$$\boxed{\sigma + \frac{c}{E}\dot{\sigma} = c\dot{\varepsilon}}$$

$$\longrightarrow \quad H(t) + \frac{c}{E}\dot{H}(t) = c\dot{\varepsilon} \qquad \textbf{[1]}$$

Aplicando la **transformada de Laplace** en **[1]**, se obtiene: $\frac{1}{s} + \frac{c}{E} = cs\bar{\varepsilon} \Rightarrow \sigma = H(t)$ **[2]**

Aplicando la **transformada inversa** en **[2]**, se obtiene la Función de Fluencia:

$$\boxed{J(t) = \varepsilon(t) = \frac{1}{E} + \frac{1}{c}t}$$

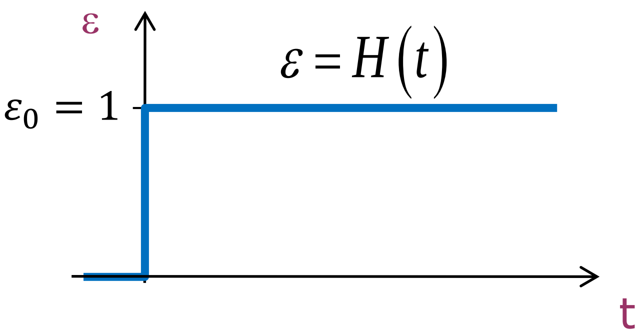


∴ En **Fluencia**, un material que obedece al modelo de Maxwell experimenta una **deformación** cuyo **valor inicial** es el que predice la **Elasticidad Clásica**.

4.5 Modelos Viscoelásticos de Maxwell y de Kelvin

Modelo de Maxwell (Cont.).-

(c) *Módulo de Relajación* $(\varepsilon_0 = 1)$:



Ecuación diferencial **del modelo**:

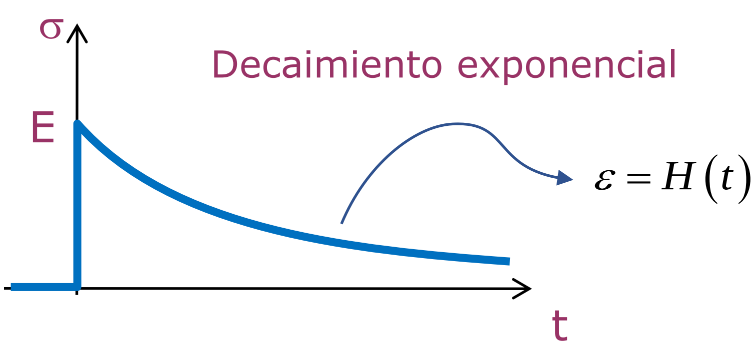
$$\boxed{\sigma + \frac{c}{E}\dot{\sigma} = c\dot{\varepsilon}} \longrightarrow \sigma + \frac{c}{E}\dot{\sigma} = c\,\delta(t) \qquad [1]$$

Aplicando la **transformada de Laplace** en **[1]**, se obtiene:

$$\overline{\sigma} + \frac{c}{E}s\overline{\sigma} = c \Rightarrow \overline{\sigma} = \frac{E}{\frac{E}{c} + s} \qquad [2]$$

Aplicando la **transformada inversa** en **[2]**, se obtiene el Módulo de Relajación:

$$\boxed{Y(t) = \sigma = E\,\exp\left(-\frac{E}{c}\,t\right)}$$



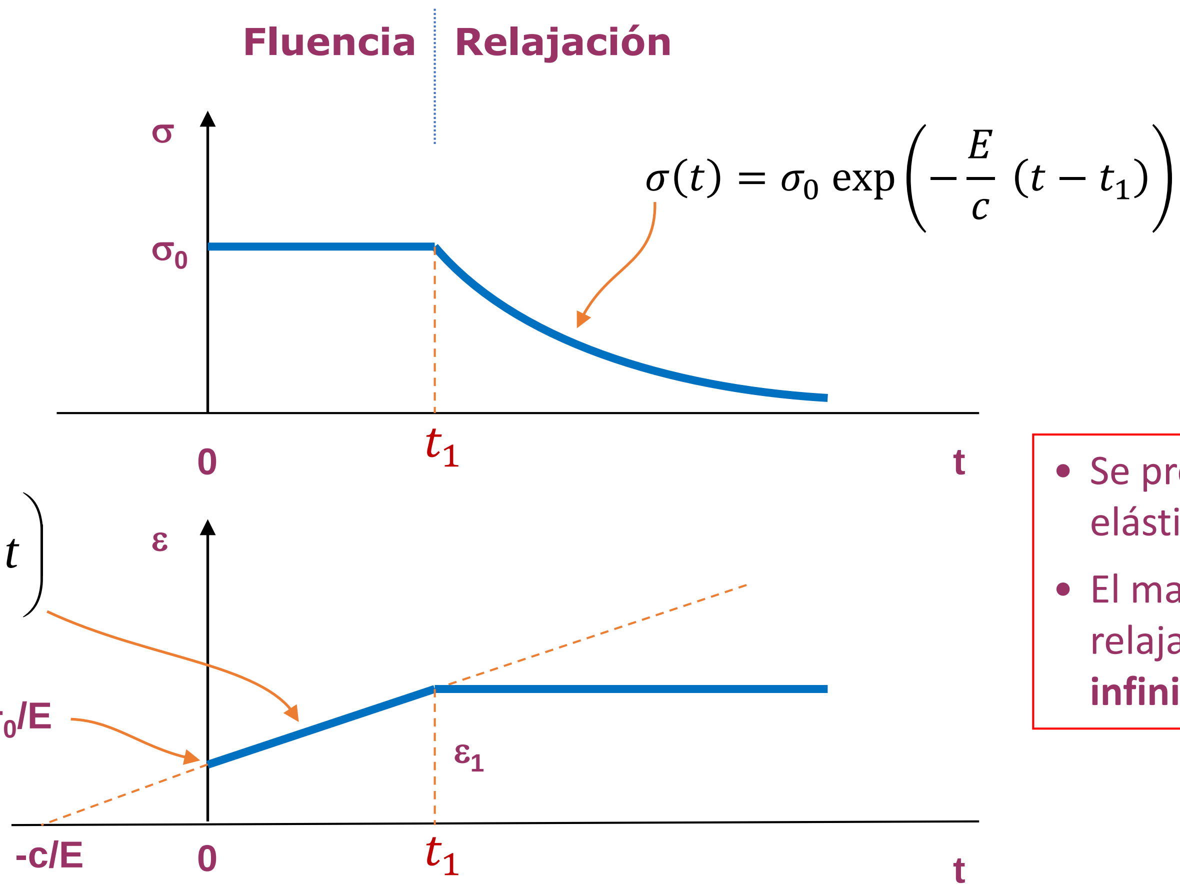
∴ En **Relajación**, un material que obedece al modelo de Maxwell experimenta una **tensión** que **decae a cero** desde un **valor inicial** igual al que predice la **Elasticidad Clásica**.

4.5 Modelos Viscoelásticos de Maxwell y de Kelvin

Modelo de Maxwell (Cont.).-

(*d*) *Procesos consecutivos de fluencia y relajación: respuesta del modelo*

Considérese una barra sometida a tracción en dos fases. En la primera se somete a una tensión constante σ_0 y, cuando ha alcanzado una deformación ε_1, se fijan los extremos de la barra



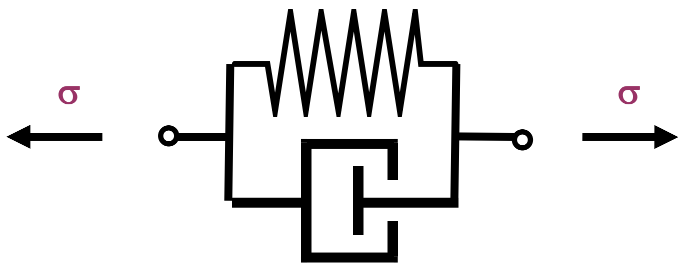
$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E}\left(1+\frac{E}{c}t\right)$$

- Se produce deformación elástica inicial.
- El material alcanza la relajación a **tiempo infinito**.

4.5 Modelos Viscoelásticos de Maxwell y de Kelvin

Modelo de Kelvin-Voigt.-

(*a*) ***Planteamiento del modelo*** :



Muelle: $\sigma_m = E\varepsilon$ **[1]**

Amortiguador: $\sigma_a = c\dot{\varepsilon}$ **[2]**

Elemento completo: $\sigma = \sigma_m + \sigma_a$ **[3]**

Sustituyendo [1] y [2] en [3]:

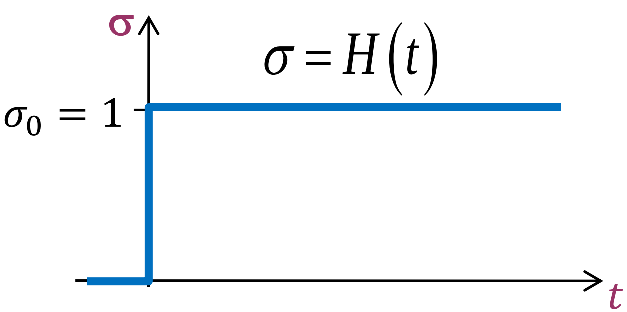
$$\boxed{\sigma = E\varepsilon + c\dot{\varepsilon}}$$

Ecuación diferencial del modelo de Kelvin

4.5 Modelos Viscoelásticos de Maxwell y de Kelvin

Modelo de Kelvin-Voigt (Cont.).-

(*b*) *Función de Fluencia* $(\boldsymbol{\sigma_0 = 1})$:



Ecuación diferencial del modelo:

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon + c\dot{\varepsilon}} \longrightarrow H(t) = E\varepsilon + c\dot{\varepsilon} \qquad \textbf{[1]}$$

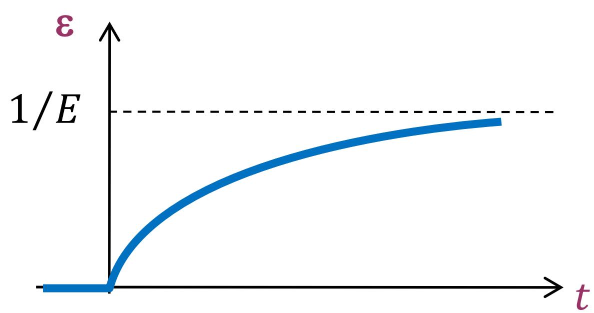
Aplicando la **transformada de Laplace** en **[1]**, se obtiene:

$$\frac{1}{s} = E\overline{\varepsilon} + cs\overline{\varepsilon}$$

Re-escribiendo:

$$\frac{1}{cs\left(\frac{E}{c} + s\right)} = \overline{\varepsilon}$$

Aplicando la **transformada inversa**, se obtiene la Función de Fluencia:

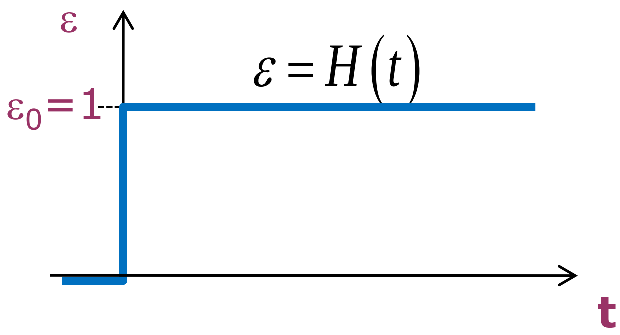


$$\boxed{J(t) = \varepsilon(t) = \frac{1}{E}\left(1 - \exp\left(-\frac{E}{c}t\right)\right)}$$

4.5 Modelos Viscoelásticos de Maxwell y de Kelvin

Modelo de Kelvin-Voigt (Cont.).-

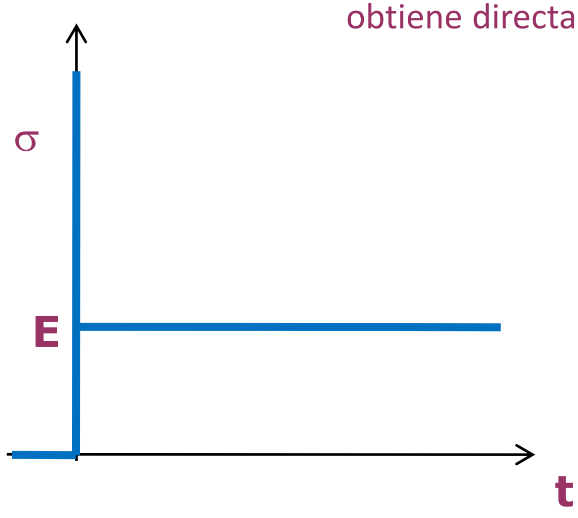
(c) *Módulo de Relajación* $(\varepsilon_0 = 1)$:



Ecuación diferencial del modelo:

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon + c\dot{\varepsilon}} \longrightarrow \sigma = EH(t) + c\delta(t) \quad \textbf{[1]}$$

Como **[1]** ya no es una ecuación diferencial, sino una algebraica, se obtiene directamente el Módulo de Relajación:



$$\boxed{Y(t) = \sigma(t) = E + c\delta(t) \quad \forall t \geq 0}$$

4.5 Modelos Viscoelásticos de Maxwell y de Kelvin

Modelo de Kelvin-Voigt (Cont.).-

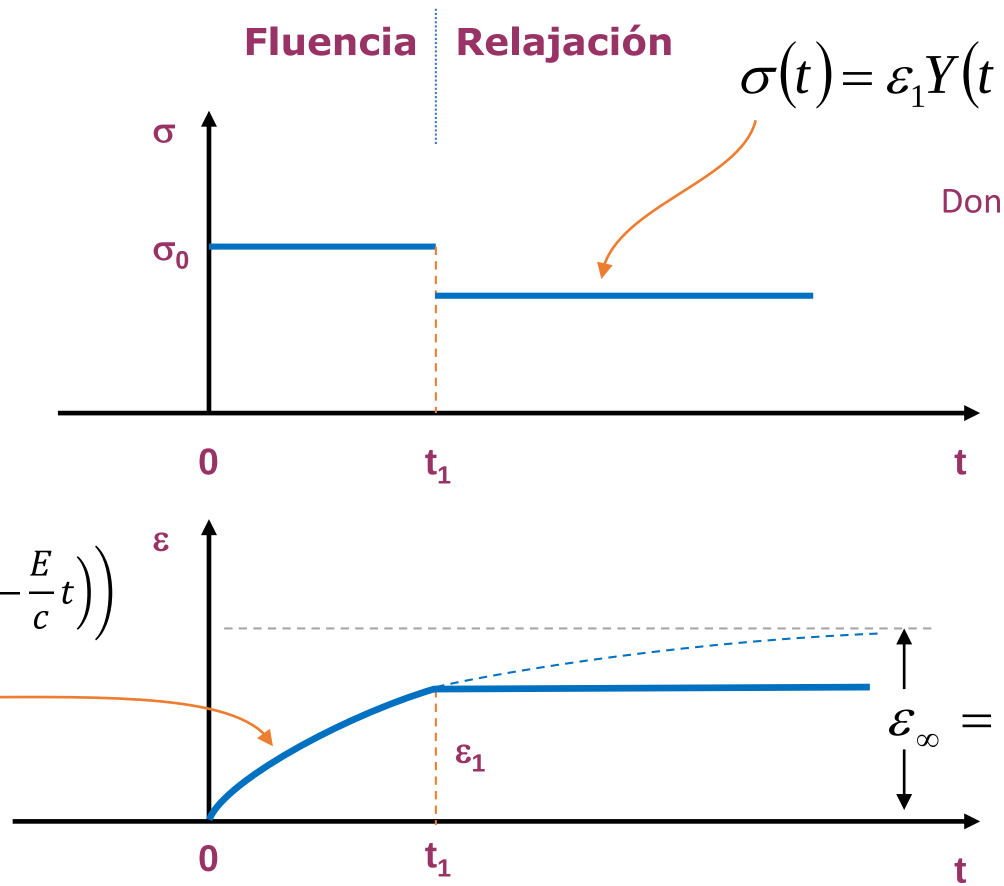
(*d*) ***Procesos consecutivos de fluencia y relajación: respuesta del modelo***

Considérese una barra sometida a tracción en dos fases. En la primera se somete a una tensión constante $\boldsymbol{\sigma_0}$ y, cuando ha alcanzado una deformación $\boldsymbol{\varepsilon_1}$, se fijan los extremos de la barra

$$\sigma(t) = \varepsilon_1 Y(t - t_1) = \varepsilon_1 \{E + c\delta(t - t_1)\}$$

Donde: $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_0}{E}\left(1 - \exp\left(-\frac{E}{c}t_1\right)\right)$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}\left(1 - \exp\left(-\frac{E}{c}t\right)\right)$$



$$\varepsilon_\infty = \frac{\sigma_0}{E}$$

- Inicialmente, no se produce deformación elástica instantánea
- El material no alcanza la relajación

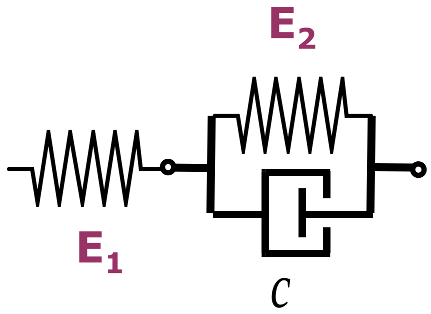
Tema 4

Viscoelasticidad

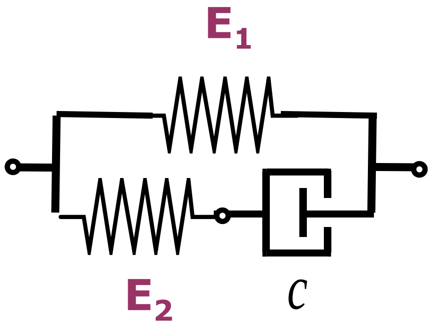
4.6 Modelos Viscoelásticos Generalizados

Consideraciones sobre los modelos de Kelvin y Maxwell

- La mayoría de los polímeros no muestran el comportamiento fluido descrito por el modelo de Maxwell, aunque puede ser suficientemente aproximado para algunos compuestos orgánicos (brea caliente).
- Así mismo, el modelo de Kelvin no permite describir la respuesta instantánea del material.
- Por lo tanto, es necesario recurrir a modelos que presenten respuesta instantánea y saturación de la deformación.



Sólido de tres parámetros



Zener

4.6 Modelos Viscoelásticos Generalizados

"Tiempo" de relajación.-

- El modelo de Maxwell, el de Kelvin-Voigt así como el "Sólido de tres parámetros" y "Sólido de Zener", presentan un único "tiempo de relajación" k:

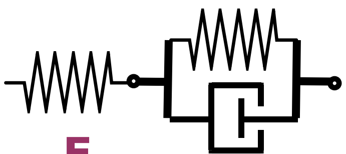
$$k = \frac{c}{E} \quad \Rightarrow \quad \exp\left(-\frac{E}{c}t\right) = \exp\left(-\frac{1}{k}t\right)$$

- En la práctica, los polímeros muestran una *distribución* de tiempos de relajación, debido a la diferente longitud de sus cadenas poliméricas.

Por ello se emplean modelos viscoelásticos más complejos, formados por combinaciones de elementos muelle y amortiguador.

4.6 Modelos Viscoelásticos Generalizados

Ejemplo: Sólido de tres parámetros



$$\boxed{\sigma + p_1\dot{\sigma} = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon}}$$

Ecuación diferencial

$$p_1 = \frac{c}{E_1 + E_2} \qquad q_0 = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \qquad q_1 = \frac{E_1 c}{E_1 + E_2}$$

Función de Fluencia

$$\boxed{J(t) = \frac{1}{q_0} + \left\{\frac{p_1}{q_1} - \frac{1}{q_0}\right\} \exp\left(-\frac{t}{k}\right)}$$

Donde:

$$k = \frac{q_1}{q_0} = \frac{c}{E_2}$$

Módulo de Relajación

$$\boxed{Y(t) = q_0 + \left\{\frac{q_1}{p_1} - q_0\right\} \exp\left(-\frac{t}{p_1}\right)}$$

4.6 Modelos Viscoelásticos Generalizados

Forme general del modelo constitutivo.-

Son del tipo:

$$a_0\sigma + a_1\dot{\sigma} + a_2\ddot{\sigma} + \cdots = b_0\varepsilon + b_1\dot{\varepsilon} + b_2\ddot{\varepsilon} + \cdots \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{m} a_k \frac{d^k\sigma}{dt^k} = \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{d^k\varepsilon}{dt^k}$$

Si se considera $\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \ddot{\varepsilon}, \ldots = 0$ en $t = 0^-$, la relación entre tensiones, derivadas de tensión, deformaciones y derivadas de deformación, es del tipo:

$$P[\sigma(t)] = Q[\varepsilon(t)] \qquad \textbf{[1]}$$

Siendo $P[\quad]$ y $Q[\quad]$ dos operadores diferenciales del tipo:

$$P[\quad] = \sum_{k=0}^{m} a_k \frac{d^k[\quad]}{dt^k} \quad ; \quad Q[\quad] = \sum_{k=0}^{n} b_k \frac{d^k[\quad]}{dt^k} \qquad \textbf{[2]}$$

Aplicando la **transformada de Laplace** en **[1]**, teniendo en cuenta **[2]**, así como las propiedades dadas en la diapositiva 21, se tiene:

$$\overline{P}(s)\overline{\sigma}(s) = \overline{Q}(s)\overline{\varepsilon}(s)$$

siendo $\overline{P}(s) = \sum_{k=0}^{m} a_k s^k$ y $\overline{Q}(s) = \sum_{k=0}^{n} b_k s^k$

4.6 Modelos Viscoelásticos Generalizados

Obtención de J(t).-

Aplicación del modelo en un ensayo de fluencia $(\sigma_0 = 1)$

$$\boxed{\sigma = \sigma_0 H(t) \rightarrow \varepsilon = \varepsilon(t) = \sigma_0 J(t)}$$

Para un valor unitario $\sigma_0 = 1$:

$$\bar{\sigma} = \overline{H} = 1/s$$

$$\bar{\varepsilon} = \bar{J}(s)$$

Así, se tiene que

$$\overline{P}(s)\bar{\sigma} = \overline{Q}(s)\bar{\varepsilon} \Rightarrow \bar{J}(s) = \frac{\overline{P}(s)}{\overline{Q}(s)}\frac{1}{s}$$

Así, dado que

$$\bar{J}(s) = \frac{\overline{P}(s)}{\overline{Q}(s)}\frac{1}{s} \xrightarrow{\text{Transformada inversa}} J(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\overline{P}(s)}{\overline{Q}(s)}\frac{1}{s}\right]$$

4.6 Modelos Viscoelásticos Generalizados

Obtención de Y(t).-

Aplicación del modelo en un ensayo de relajación

$$\varepsilon = \varepsilon_0 H(t) \rightarrow \sigma = \sigma(t)$$

$$\boxed{\sigma(t) = \varepsilon_0 Y(t)}$$

Y(t) módulo de relajación

$$\bar{P}(s)\bar{\sigma} = \bar{Q}(s)\bar{\varepsilon} \longrightarrow \bar{\sigma} = \frac{\bar{Q}(s)}{\bar{P}(s)}\bar{\varepsilon}$$

$$\xrightarrow[\bar{\varepsilon} = 1/s]{} \quad \bar{\sigma} = \bar{Y}(s) = \frac{\bar{Q}(s)}{\bar{P}(s)}\frac{1}{s}$$

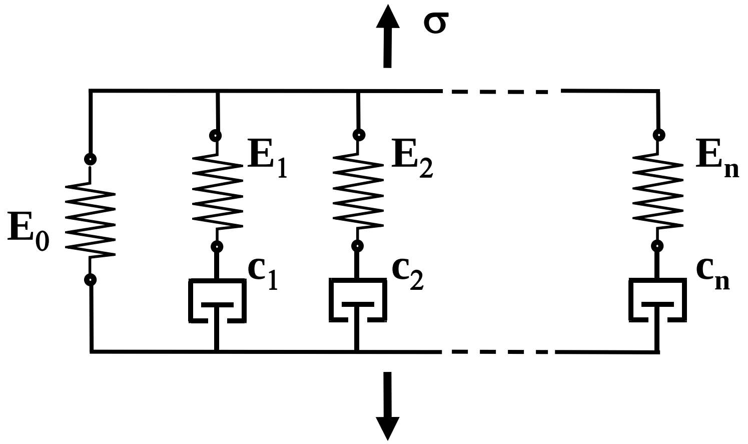
Se comprueba que:

$$\bar{Y}(s)\,\bar{J}(s) = \frac{1}{s^2}$$

4.6 Modelos Viscoelásticos Generalizados

Ejemplo: Modelo de Wiechert (Maxwell generalizado).-

Presenta una distribución más completa de tiempos de relajación



Sumando las tensiones de cada cadena:

$$\sigma = \sigma_e + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \xrightarrow{\mathcal{L}[\ \ ]} \overline{\sigma} = \overline{\sigma}_e + \sum_{i=1}^{n} \overline{\sigma}_i \quad \begin{cases} \overline{\sigma}_e = E_0 \overline{\varepsilon} & \text{Para el muelle.} \\ \overline{\sigma}_i \left\{ 1 + \dfrac{c_i}{E_i} s \right\} = c_i s \overline{\varepsilon} & \text{Para cada cadena Maxwell.} \end{cases}$$

4.6 Modelos Viscoelásticos Generalizados

Ejemplo: Modelo de Wiechert (Maxwell generalizado).- (cont.)

Sustituyendo lo anterior, se obtiene:

$$\overline{\sigma}(s) = \left\{ E_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i s}{(s + E_i/c_i)} \right\} \overline{\varepsilon}(s)$$

Transformada de la Ecuación Constitutiva

Módulo de relajación: $\varepsilon = H(t) \quad \Rightarrow \quad \overline{\varepsilon} = \frac{1}{s} \;\; \text{y} \;\; \overline{\sigma}(s) = \overline{Y}(s)$

$$\overline{Y}(s) = \frac{E_0}{s} + \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i}{(s + E_i/c_i)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}[\ \ ]} \boxed{Y(t) = E_0 + \sum_{i=1}^{n} E_i \exp\left(-\frac{E_i}{c_i} t\right)}$$

$$k_i = \frac{c_i}{E_i}$$

Diferentes tiempos de relajación !!!